第19卷第3期 数学教育学报 Vol.19, No.3
2010年6月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Jun., 2010

基于情境的数学启发式教学在经济类高等数学教学中的实践与探索

毕秀国[1]，宋福贵[1]，董晓梅[1]，吕传汉[2]

（1．大连工业大学 信息科学与工程学院，辽宁 大连 116034；2．贵州师范大学，贵州 贵阳 550001）

摘要：数学情境是指学生从事数学学习活动的环境，产生数学学习行为的条件．基于情境的数学启发式教学是由认识的困惑到解疑、由模糊到确定的动态平衡过程，是尽可能创设"愤悱"数学教学情境的过程．基于数学情境的启发式教学应根据数学教学内容的特点，学生已有的知识、经验和数学思维发展的实际水平，把握设置数学情境．基于情境的数学启发式教学模式在提高高等数学教学效果上的作用体现在：学生对数学知识之间的联系的认识更加深刻，能更积极地参与课堂教学．

关键词：数学情境；数学启发式教学；数学知识结构；数学过程教学

中图分类号：G642.421 文献标识码：A 文章编号：1004–9894（2010）03–0093–04

经济类高等数学是高等学校经济管理类专业的一门重要基础课程．本课程通过各个教学环节，不但培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力，以及比较熟练的运算能力和综合运用所学知识去分析和解决经济、管理等学科领域内的实际问题的能力，还在培养经济管理类学生的综合素质和创新意识方面起着十分重要的作用．因此，经济数学的教学和课程建设受到了广泛的关注和重视，同时也出现了一些教学问题．例如，如何处理好学时与教学内容之间的关系？如何将数学建模与数学实验的思想与教学内容相结合？如何在数学教学中给学生数学美的感受，化抽象为形象，激发学生学习热情，提高教学质量？如何在保证基本的教学质量和扩大学生受益面的同时，又能培养一些优秀拔尖的人才……这些问题，在经济类高等数学的教学过程中表现特别突出．针对这些问题，结合自己的数学教学实践发现，基于情境的数学启发式教学，对解决上述问题是行之有效的方法．

1 对基于情境的数学启发式教学的基本认识

1.1 数学启发式教学

数学启发式教学是让学生在充分的思维参与和情感参与下，通过教师引导主动建构和探索、体验，学会数学思考，达到对数学问题本质的理解，从而提高学生学习的主动性和迁移能力．

1.2 基于情境的数学启发式教学

孔子在《论语·述而》中提出："不愤不启，不悱不发，举一隅不以三隅反，则不复也．""愤悱"是数学启发式教学的目标，使学生产生"愤悱"是数学启发式教学的内在要求．基于情境的数学启发式教学，就是指教师从学生已有的数学知识、经验和思维水平出发，力求创设"愤悱"的数学教学情境以产生认知冲突，形成认知和情感的不平衡态势，从而启迪学生主动积极思维，引导学生学会思考，通过点拨思路和方法，使学生的数学思维活动得以发生和发展，数学知识、经验和能力得到生长，从中领悟数学本质，达成教学目标的过程．这一过程实质上是由认识的困惑到解疑、由模糊到确定的动态平衡过程，是尽可能创设"愤悱"数学教学情境的过程[1].

1.3 数学情境的创设

1.3.1 数学情境的定义

所谓数学情境，是指学生从事数学学习活动的环境，产生数学学习行为的条件．数学教学是教学生学数学，从这一角度看数学教学情境，实质上它就是引导学生学习数学知识、发现数学问题、提出数学问题和解决数学问题的背景和环境[2]．数学情境中涉及的内容并不局限于现实生活内容，还可以是数学本身的内容、相关学科中的内容或虚拟的内容．创设数学情境的目的，在于引发学生产生与数学学习内容有实质性联系的"问题"，使数学学习内容与学生求知心理之间产生一种失衡状态，以形成认知冲突，激活学生的兴趣和思维，从而产生内心最强烈的学习心向和认知需求，最终有效地把握数学的本质[3]．

1.3.2 高等数学教学中数学情境的创设

（1）创设数学情境的意义．

抽象数学问题的发现和提出常常依赖于某些直观背景和情境，有了数学情境做支撑，并与学习内容建立自然、实质性的联系，使数学教学成为教师引导下学生进行的主动探索过程．特别在数学启发式教学中，要使学生处于"欲知不知、欲言未能"而又不甘心于这种困惑的"愤悱"状态，就需要使认知冲突和困惑条理化以形成问题，就需要为学生创设一个形成问题的数学情境，通过情境的创设来引出问题，进而根据问题来驱动教学[4~5]．

（2）数学情境创设举例．

收稿日期：2009–12–13
基金项目：中国教育学会"十一五"科研规划重点课题——西南地区数学"情境—问题"教学实验的推广研究（学会：0629070）
作者简介：毕秀国（1978—），女，山东潍坊人，讲师，硕士，主要从事数学教育研究．

创设数学情境的途径很多，可以从不同的内容、不同的角度、不同的方法、不同的形式来创设数学情境，以下试举两例．

情境一：(从生活实际中选取素材)有一块土地需要铺设草坪，形状如图 1 所示，草坪的面积多大？若一边有微小弧度如图 2 所示，这时面积为多大？若一边弧度很大如图 3 所示，又该如何求解面积的大小？

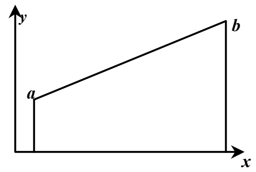

图 1 铺设草坪示意图（一）

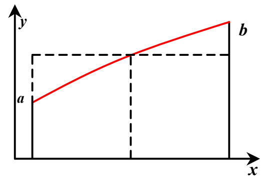

图 2 铺设草坪示意图（二）

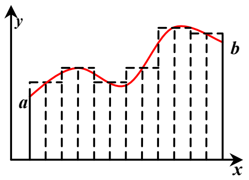

图 3 铺设草坪示意图（三）

引导学生利用“以直代曲”的思想通过“分割—近似—求和—取极限”的步骤解决问题，从而引入定积分的教学．

情境二：(从关注的热点问题中选取素材)使用贷款购房、买车是近年来的一种时尚，但个人的还款能力不同，该如何制定还款计划？一般贷款按年计算，而还款按月计算．

设 m 为每月偿还的贷款数，N 代表还清贷款所需的年数，r 是贷款的年利率，若以 y_n 代表 n 年后所欠的贷款数，则 y_0 表示最初的贷款总额，$y_n=0$ 表示贷款还清，这里 r 是常数．

问题 1：(当 N 确定时)每个月还款数额 m 为多少？

问题 2：(当每月能承受的数额 m 确定时)需要多少年才能还清？

问题 3：在还贷 n 年后，还欠的贷款数是多少？

根据假设建立相应的数学模型解决问题，这里最后问题的等量关系即：

下一年欠钱数=今年欠钱数+利息–今年偿还钱数，

符号表示为：$y_{n+1}=y_n+ry_n-12m=Ry_n+H$，其中，$R=1+r$，$H=-12m$．由此引出差分方程．

2 基于情境的数学启发式教学在高等数学教学中的应用——导数概念的教学

导数概念反映的是一个变量相对另一个变量变化时的即时变化率，这体现在许多实际情境之中．在物理学、经济学中，许多现象都是某种变化率的反映，如速度、加速度、成本变化率、边际等．考虑到经济类学生多为文科生，物理和几何的基础知识薄弱，以瞬时速度问题和曲线切线的斜率问题作为引例很难引起他们的兴趣和重视，所以将学生熟悉而且感兴趣的边际问题(在经济学中将某些经济类函数的导数称为边际)设置为导数概念教学的问题情境．教学过程如下：

2.1 创设情境

问题 1 产量与成本的关系是什么？假设某企业每月生产 x 吨产品的总成本 C（千元）是产量 x 的函数 $C(x)=x^2-10x+20$，问：

(1)产量为 10 吨时的总成本是多少？

(2)产量为 10 吨时的平均成本是多少？

(3)当产量从 10 吨增加到 15 吨时，总成本的平均变化率是多少？

(4)当产量为 15 吨时，总成本的变化率（边际成本）是多少？

问题 2 成本与利润的关系是什么？若问题 1 中的产品每吨销售价格为 2 万元，问：每月产量分别为 8、10、15、20 吨时的边际利润各是多少？

问题 3 边际问题所反映出的共性是什么？对于一般情况怎样？

问题 4 设一市场对某商品的需求量 Q 是 p 的函数：$Q=50-5p$，求其边际需求及边际价格．

2.2 解决问题

问题 1 中的(1)(2)学生根据已有的知识，自己很轻松就解决出来了，而对于(3)绝大部分学生能够解决，(4)却需要在老师引导下一步步展开，但正因为前面 3 个问题给了学生自信，使他们对于问题有了强烈的解决欲望，也就是我们所说的处于“愤悱”状态．分别为：

(1)产量为 10 吨时的总成本为：$c(10)=20$（千元）；

(2)产量为 10 吨时的平均成本为：$20/10=2$（千元）；

(3)当产量从 10 吨增加到 15 吨时总成本的平均变化率是 $\frac{c(15)-c(10)}{5}=\frac{75}{5}=20$；

(4)当产量为 x 吨时，总成本为 $x^2-10x+20$ 千元，当产量为 10 吨时，总成本为 95 千元，当产量从 x 吨增加到 10 吨时总成本平均变化率为 $\frac{\Delta c}{\Delta x}=\frac{x^2-10x+20-95}{x-15}$ $=\frac{x^2-10x-75}{x-15}$．

当 x 越接近 15 时，上式与 15 吨时的总成本的变化率越接近，由极限思想知：当 x 趋向 15 时，上式的极限就是产量为 15 吨时总成本的变化率也即边际成本．

问题 2 要求边际利润，先建立利润与产量的函数关系 $L(x)$，依题意，每月生产 x 吨产品的总收入函数为 $L(x)$：$R(x)=20x$（千元），因此，生产 x 吨的利润函数为：$L(x)=R(x)-C(x)=20x-(x^2-10x+20)=-x^2+30x-20$，生产 8 吨的利润为 156（千元），生产 x 吨到 8 吨的平均利润为：$\frac{\Delta L}{\Delta x}=\frac{-x^2+30x-176}{x-8}=22-x$．

当 x 趋于 8 时，上式的极限 14 即为产量 8 吨时的边际利润．同理可求 10 吨、15 吨、20 吨时的边际利润分别为 12、0、–10．以上结果表明，当月产量为 8 吨时，再增产 1 吨，利润就增加 1 万 4 千元；当月产量为 10 吨时，再增产 1 吨，利润就增加 1 万元；当月产量为 15 吨时，再增产 1

吨，利润没有增加；而当月产量为 20 吨时，再增产 1 吨，利润没有增加反而减少了 1 万元．显然，随着产量的增加，企业从增产中获得的利润越来越少，当月产量超过 15 吨时，边际利润为负值，正是这似乎违背常理的现象会引起学生的好奇，以及强烈求知欲望，使学生“欲知不知、欲言未能”，而又不甘心于这种困惑的“愤悱”状态达到了极至．这时又提出了新的问题：

问题 5　既然不能完全靠增加产量来提高利润，那么保持怎样的产量才能使企业获得最大利润呢？

这个问题也正是我们知识点的延伸：导数的应用，从而使得我们对于整章的学习有了一个很好的衔接．这时对讨论归纳：边际问题实际上是某种特殊结构的极限，撇开具体问题的特性，用数学的函数关系表示可知：平均概念表示的是在 x 值的某一领域内 y 值的变化情况；边际概念指的是 x 的某个值的边缘上的变化情况．前者是 y 的平均变化率，表示为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，是函数 $y=f(x)$ 在以 $x_0, x_0+\Delta x$ 为端点的区间上的平均变化率；后者是 y 的瞬时变化率，即变量 y 对变量 x 的导数，由此引出导数的概念．在此基础上，进一步分析总结有关按定义计算导数的方法与步骤，使学生明确边际问题就是求导问题．在讨论的过程中，学生已经感受到了数学知识与自己专业学习的密切性，从而提高学习的主动积极性，由此可以顺利展开其它知识点的教学．最后再以情境的问题 4 进行练习，以加深对知识的理解与掌握，提高解决实际问题的能力，这样学生下课时内心充满了成就感．

2.3　教学反思

本课例是教学实验中的一次尝试，总体来看，有以下几个特点：

（1）从情境中自然过渡，确立新知识生长点．

教师以经济学中学生熟悉的实际问题设置问题情境，激起学生浓厚的兴趣，使问题由易到难，从情境中自然过渡，确立新知识生长点——学生由已知的知识点逐渐进入新的知识体系．

（2）启发学生解题反思，引导提出问题与解决问题．

本课例突破了传统意义上教师提出问题，学生加以回答的教学方式．问题 2 研究了生产量分别为 8、10、15、20 吨时的边际利润后，教师运用启发性提示语，启发学生提出问题：“大家有没有发现一个奇怪现象？”“为什么利润不随着产量的增加而增加？”“什么时候才能取得最大利润？”教师正是顺着学生的思路引导其在探究中学习．

事实上，学生自己提出的问题才更能激发其探究的内在需要，更有利于引发头脑中激烈的思维活动，从而实现了让学生带着问题走进课堂，同时也带着新的问题走出课堂，激发出了学生强烈的求知欲望．

（3）营造和谐的学习氛围，促进学生参与性学习．

整堂课师生处于平等、和谐的交流氛围中，以学生发现、提出的问题为教学活动的推进轴，教师没有太多的干预，而是在有收有放中让学生思考、概括、总结，建构信息的意义．学生对有疑问的结论能够追问“为什么？”，对由于时间仓促没有来得及深入思考最大利润问题，多数学生提出质疑并跑上讲台追问老师，体现出学生思维活动的积极、主动参与和不懈的思考．

（4）本课例教学的不足：教师对学生的回答缺少必要的反馈和系统概括．

教学信息的及时反馈和强化有助于学生进一步的理解和思考．本课例中，教师为了完成教学进度，对于学生发现的有意义结论缺少进一步的条理化和系统化．真实的课堂教学不可能完全沿着教师预设的轨道行进，面对学生提出的意料之外的有意义问题，教师需灵活调控教学进程，这是教师教学机智的真正展现，也对教师教学理念的更新和教学艺术的升华提出了更高的要求．

3　实验结果分析

3.1　数学成绩方面的比较

管理学院 2008 级经管专业共有 12 个班，参加实验的授课老师教授 6 个班，3 合班上课，以物流专业 3 个班作为实验班级，国贸专业 3 个班级作为对比班级．从入学的数学成绩看，班级之间差异不大，学生数学成绩的比较主要看通过教学实验后，实验班的成绩与非实验班的差异是否明显．运用独立样本和单一样本的 t 检验，实验前后成绩的比较分析如表 1．

表 1　实验班与非实验班实验前后数学成绩的比较

	班级	平均数	标准差	人数	t	P
月考成绩	实验	82.541 7	7.231 5	92	–2.348	0.009
	非实验	79.891 3	8.093 2	93		
期中成绩	试验	72.875 0	10.793 2	92	–4.723	0.000
	非实验	67.588 9	11.673 2	93		
期末成绩	实验	84.458 3	9.124 3	92	–6.2403	0.000
	非实验	75.666 7	10.012 3	93		

从表 1 可看出，10 月份月考成绩两个班级的平均分相差不大，运用独立样本的 t 检验，（t=2.348，p=0.009>0.005），即在 0.005 的水平上差异不显著．但期末考试成绩平均分相差明显拉大，运用独立样本的 t 检验，成绩差异显著（t=6.917，p=0.000<0.005）．

3.2　非认知方面的比较

通过编制非认知调查问卷，对参与实验的学生进行了前后测．调查的主要内容为对数学知识之间联系的认识、对数学的认识、数学学习的兴趣、对一堂“好”数学课的看法、提出数学问题方面、对进行数学启发式教学的态度等．目的在于了解实验前后学生对这些问题的看法是否有变化．通过数据处理和比较，具体认识体现在以下几个方面：

（1）前后测中学生对数学之间联系的认识明显不同，学校里学的数学对日常生活作用之认识的分布明显不同．

就问题：“数学知识之间的联系不很紧密”，前测中实验班学生强烈反对的占 13%，反对的占 47.8%．后测中强烈反

对的占33.3%，反对的占48.7%．经检验t=2.387，p=0.019，说明实验后学生对数学知识之间联系的认识有明显变化．出现这一变化除和其它因素有关外，与实验教师在教学中注重启发学生建立数学知识之间的联系，形成组织合理的知识结构网络有一定的关系．

就问题"学校里学到的数学对日常生活没有多少用"，前测中强烈反对和反对的分别占到13%和21.7%，后测中强烈反对和反对的分别占到30.8%和35.9%．经检验t=2.415，p=0.018，说明前后测中学生对此问题的认识存在显著差异．

（2）实验班大多数学生把老师是否引导学生主动、积极地思维作为心目中一堂"好"数学课的标准之一．实验和非实验班级前后测中选此项的比例有所上升．

实验班学生在前后测中选此项的比例分别为58.7%和74.4%，反映出比例有所上升．由此可看出教师引导学生主动积极地思维是学生心仪的课堂，说明多数学生已认识到主动积极地思维在数学学习中的重要作用．

（3）实验班学生对教师启发引导他们进行数学学习大多持积极参与的态度．

在前测问卷中，就问题'对教师启发引导你们进行数学学习，你的态度是……"，实验班的学生选择积极参与和按老师的要求做的百分比分别为68.9%和42.2%，由此说明多数学生对教师启发引导他们进行数学学习持积极参与的态度，这为进行数学启发式教学的实验研究奠定了基础．

4 小 结

通过教学实践发现，以基于数学情境的启发式教学为指导思想，对于提高讲授教学和发现教学的有效性，摆脱注入式和机械学习的束缚有明显的成效．另外，教学中应根据数学教学内容的特点，学生已有的知识、经验和数学思维发展的实际水平，把握设置什么样的情境，什么内容该讲、什么内容该引导学生发现，灵活选择和综合运用相应的教学方法，而不是拘泥或追求教学方法的外在形式．因此，教学内容与教学方法的研究和改革是一个长期而复杂的过程，欲达到教学目的，全面提高学生的数学素质和综合素质，需要广大数学教师积极参与、大胆实践．

[参 考 文 献]

[1] 韩龙淑．数学启发式教学研究[M]．北京：中国戏剧出版社，2008．

[2] 吕传汉，汪秉彝．论中小学"数学情境与提出问题的教学"的教学[J]．数学教育学报，2006，15（2）：74–79．

[3] 涂荣豹．数学教学认识论[M]．南京：南京师范大学出版社，2003．

[4] 张奠宙．数学教育学[M]．南昌：江西教育出版社，1991．

[5] [苏]弗利德曼．中小学数学教学心理学原理[M]．陈心五译．北京：北京师范大学出版社，1987．

[6] [美]约翰·杜威．思维与教学[M]．孟宪承译．上海：商务印书馆，1936．

Practice and Exploration about Situational Heuristic Teaching in the Economical Advanced Mathematics Teaching

BI Xiu-guo[1], SONG Fu-gui[1], DONG Xiao-mei[1], LV Chuan-han[2]

(1. School of Information Science & Engineering, Dalian Polytechnic University, Liaoning Dalian 116034, China;
2. Guizhou Normal University, Guizhou Guiyang 550001, China)

Abstract: By using theoretical and practical methods, the theoretical and practical basis of math heuristic teaching was thought over. As an example to derivative teaching, described this teaching mode in higher mathematics teaching applications.

Key words: mathematics situation; mathematics heuristic teaching; mathematics knowledge structure; mathematics teaching process

[责任编校：陈汉君]